2025-2026

Mécanique analytique, Corrigé 7

Assistants et tuteurs :

jeanne.bourgeois@epfl.ch
luca-stefan.dugaiasu@epfl.ch
nathan.brunet@epfl.ch
lorenzo.fioroni@epfl.ch
filippo.ferrari@epfl.ch
jonas.daverio@epfl.ch
leo.goutte@epfl.ch
mathias.findrihan@epfl.ch
remi.thomas@epfl.ch

Exercice 1 : Couplage quadratique et coordonnées normales

(a) Trouver les moments conjugués p_x et p_y. Écrire les équations de Hamilton pour (x, y, p_x, p_y) et montrer que c'est un système de quatre équations différentielles couplées.

On commence par écrire le Lagrangien à partir de l'énergie cinétique et potentielle :

$$L(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = T - V = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - k(x-y)^2. \tag{1}$$

Les moments conjugués sont

$$p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}, \qquad p_y = \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = m\dot{y}. \tag{2}$$

Le Hamiltonien s'obtient par transformation de Legendre :

$$H(x, y, p_x, p_y) = p_x\dot{x} + p_y\dot{y} - L = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{p_y^2}{2m} + k(x-y)^2. \tag{3}$$

On peut ainsi écrire les équations de Hamilton

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p_x} = \frac{p_x}{m}, \qquad \dot{y} = \frac{\partial H}{\partial p_y} = \frac{p_y}{m}, \tag{4}$$

$$\dot{p}_x = -\frac{\partial H}{\partial x} = -2k(x-y), \qquad \dot{p}_y = -\frac{\partial H}{\partial y} = +2k(x-y). \tag{5}$$

On voit que les quatre variables sont couplées. Le couplage est plus évident en écrivant les équations de mouvement pour x et y. En éliminant p_x et p_y :

$$m\ddot{x} = -2k(x-y), \tag{6}$$

$$m\ddot{y} = +2k(x-y), \tag{7}$$

soit un système manifestement couplé par la combinaison $(x-y)$.

(b) Trouver une transformation canonique à des nouvelles coordonnées $u = u(x, y)$ et $v = v(x, y)$, de manière à découpler les degrés de liberté $(u,\, p_u)$ et $(v,\, p_v)$. On appelle ces coordonnées « normales ».

D'après la forme du potentiel $V = k(x-y)^2$, on est naturellement amené à considérer les combinaisons symétriques et antisymétriques des coordonnées x et y. On définit donc les nouvelles coordonnées

$$u = \frac{x+y}{\sqrt{2}}, \qquad v = \frac{x-y}{\sqrt{2}}. \tag{8}$$

Pour calculer les moments conjugués p_u et p_v, on utilise la définition générale

$$p_u = \frac{\partial L}{\partial \dot{u}}, \qquad p_v = \frac{\partial L}{\partial \dot{v}}. \tag{9}$$

On exprime d'abord $\dot{u}$ et $\dot{v}$ en fonction de $\dot{x}$ et $\dot{y}$:

$$\dot{u} = \frac{\dot{x}+\dot{y}}{\sqrt{2}}, \qquad \dot{v} = \frac{\dot{x}-\dot{y}}{\sqrt{2}}. \tag{10}$$

On peut inverser ce système pour obtenir

$$\dot{x} = \frac{\dot{u}+\dot{v}}{\sqrt{2}}, \qquad \dot{y} = \frac{\dot{u}-\dot{v}}{\sqrt{2}}. \tag{11}$$

On remplace dans le Lagrangien :

$$L(u, v, \dot{u}, \dot{v}) = \frac{m}{2}\left(\left(\frac{\dot{u}+\dot{v}}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{\dot{u}-\dot{v}}{\sqrt{2}}\right)^2\right) - k(\sqrt{2}\, v)^2 \tag{12}$$

ce qui donne

$$L(u, v, \dot{u}, \dot{v}) = \frac{m}{2}(\dot{u}^2 + \dot{v}^2) - 2k\, v^2. \tag{13}$$

On calcule les moments conjugués :

$$p_u = \frac{\partial L}{\partial \dot{u}} = m\dot{u}, \qquad p_v = \frac{\partial L}{\partial \dot{v}} = m\dot{v}. \tag{14}$$

On voit que ce Lagrangien ne dépend pas de u et que donc le moment conjugué p_u sera conservé. Ceci indique déjà que les degrés de liberté seront découplés.

(c) Exprimer le Hamiltonien en fonction des coordonnées normales (u, v, p_u, p_v) et montrer que la transformation est en effet canonique.

Le Hamiltonien s'obtient par transformation de Legendre :

$$H(u, v, p_u, p_v) = p_u\dot{u} + p_v\dot{v} - L = \frac{p_u^2}{2m} + \frac{p_v^2}{2m} + 2k\, v^2. \tag{15}$$

On remarque que le Hamiltonien est la somme de deux termes indépendants, l'un ne dépendant que de (u, p_u) et l'autre que de (v, p_v). Ainsi, les degrés de liberté sont bien découplés.

Pour montrer que la transformation est canonique, on peut vérifier les crochets de Poisson fondamentaux. Cependant, une manière plus simple est de vérifier que le Hamiltonien conserve sa forme sous la transformation. En effet, on a

$$H(x, y, p_x, p_y) = p_x\dot{x} + p_y\dot{y} - L = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{p_y^2}{2m} + k(x-y)^2, \tag{16}$$

et

$$H(u, v, p_u, p_v) = p_u\dot{u} + p_v\dot{v} - L = \frac{p_u^2}{2m} + \frac{p_v^2}{2m} + 2k\, v^2. \tag{17}$$

En remplaçant u et v par leurs expressions en fonction de x et y, on obtient

$$\begin{aligned} H(u(x,y),v(x,y),p_u(\dot{x},\dot{y}),p_v(\dot{x},\dot{y})) &= \frac{m}{4}(\dot{x}+\dot{y})^2 + \frac{m}{4}(\dot{x}-\dot{y})^2 + k\,(x-y)^2\,, \\ &= \frac{m}{2}(\dot{x}^2+\dot{y}^2) + k(x-y)^2, \\ &= H(x,y,p_x,p_y). \end{aligned}$$

Ainsi, le Hamiltonien conserve sa forme sous la transformation, ce qui prouve que la transformation est canonique.

(d) Ecrire les équations de Hamilton et trouver la solution dans le cas général.

Les équations de Hamilton découplées sont

$$\dot{u} = \frac{\partial H}{\partial p_u} = \frac{p_u}{m}, \qquad \dot{v} = \frac{\partial H}{\partial p_v} = \frac{p_v}{m}, \tag{18}$$

$$\dot{p}_u = -\frac{\partial H}{\partial u} = 0, \qquad \dot{p}_v = -\frac{\partial H}{\partial v} = -4k\,v. \tag{19}$$

On peut résoudre ces équations séparément pour les deux modes. Pour le mode u :

$$\dot{u} = \frac{p_u}{m}, \qquad \dot{p}_u = 0 \implies u(t) = u_0 + \frac{p_{u0}}{m}\,t \quad \text{(translation uniforme, } p_u \text{ constant).} \tag{20}$$

Pour le mode v :

$$\dot{v} = \frac{p_v}{m}, \qquad \dot{p}_v = -4k\,v \implies \ddot{v} + \omega_v^2 v = 0, \quad v(t) = A\cos(\omega_v t + \phi), \tag{21}$$

avec $\omega_v = 2\sqrt{k/m}$.

En revenant à (x,y), on a

$$x(t) = \frac{u(t)+v(t)}{\sqrt{2}}, \qquad y(t) = \frac{u(t)-v(t)}{\sqrt{2}}, \tag{22}$$

montrant explicitement la superposition d'une translation commune et d'une oscillation relative en opposition de phase.

Exercice 2 : $\mathcal{L} \to \mathcal{H}$

Pour obtenir l'Hamiltonien, on calcule premièrement les moments conjugués. Si $\mathcal{L} = \mathcal{L}(q_i, \dot{q}_i)$, les moments sont $p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}$. Les relations obtenues doivent être inversées pour obtenir $\dot{q}_i = \dot{q}_i(p_j, q_j)$ et l'Hamiltonien est donné par :

$$H(q_i, p_i) = \sum_i p_i \dot{q}_i(p_j, q_j) - \mathcal{L}(q_i, \dot{q}_i(p_j, q_j)) \tag{13}$$

1. Le moment conjugué à θ est $p_\theta = mR^2\dot{\theta}$, d'où $\dot{\theta} = \frac{p_\theta}{mR^2}$. L'Hamiltonien est donc :

$$H(\theta, p_\theta) = \frac{p_\theta^2}{2mR^2} - \frac{1}{2}mR^2\omega^2\sin^2\theta + mgR\cos\theta \tag{14}$$

Les équations de Hamilton sont alors :

$$\begin{cases} \dot{\theta} = \dfrac{\partial H}{\partial p_\theta} = \dfrac{p_\theta}{mR^2} \\ \dot{p}_\theta = -\dfrac{\partial H}{\partial \theta} = mR^2\omega^2 \sin\theta\cos\theta + mgR\sin\theta \end{cases} \tag{15}$$

2. Les moments conjugués sont $p_\theta = mR^2\dot{\theta}$ et $p_\phi = mR^2\sin^2\theta\,\dot{\phi}$, d'où $\dot{\theta} = \frac{p_\theta}{mR^2}$ et $\dot{\phi} = \frac{p_\phi}{mR^2\sin^2\theta}$. L'Hamiltonien est donc :

$$H(\theta, \phi, p_\theta, p_\phi) = \frac{p_\theta^2}{2mR^2} + \frac{p_\phi^2}{2mR^2\sin^2\theta} + mgR\cos\theta \tag{16}$$

Les équations de Hamilton sont alors :

$$\begin{cases} \dot{\theta} = \dfrac{\partial H}{\partial p_\theta} = \dfrac{p_\theta}{mR^2} \\ \dot{\phi} = \dfrac{\partial H}{\partial p_\phi} = \dfrac{p_\phi}{mR^2\sin^2\theta} \\ \dot{p}_\theta = -\dfrac{\partial H}{\partial \theta} = \dfrac{\cos\theta}{mR^2\sin^3\theta}p_\phi^2 + mgR\sin\theta \\ \dot{p}_\phi = -\dfrac{\partial H}{\partial \phi} = 0 \end{cases} \tag{17}$$

3. Les moments conjugués sont $p_1 = m\dot{x}_1$ et $p_2 = m\dot{x}_2$. L'Hamiltonien est donc :

$$H(x_1, x_2, p_1, p_2) = \frac{p_1^2}{2m} + \frac{p_2^2}{2m} + \frac{k}{2}\left(x_1^2 + x_2^2 + (x_1 - x_2)^2\right) \tag{18}$$

Les équations de Hamilton sont alors :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \dfrac{\partial H}{\partial p_1} = \dfrac{p_1}{m} \\ \dot{x}_2 = \dfrac{\partial H}{\partial p_2} = \dfrac{p_2}{m} \\ \dot{p}_1 = -\dfrac{\partial H}{\partial x_1} = -k(2x_1 - x_2) \\ \dot{p}_2 = -\dfrac{\partial H}{\partial x_2} = -k(2x_2 - x_1) \end{cases} \tag{19}$$

4. Les moments conjugués peuvent s'écrire sous la forme :

$$\begin{pmatrix} p_u \\ p_\phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_1 + m_2 & m_2 l\cos\phi \\ m_2 l\cos\phi & m_2 l^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{\phi} \end{pmatrix} \tag{20}$$

En inversant la matrice, on trouve :

$$\dot{u} = \frac{l\,p_u - \cos\phi\,p_\phi}{l(m_1 + m_2\sin^2\phi)} \quad \text{et} \quad \dot{\phi} = \frac{(m_1+m_2)p_\phi - m_2 l\cos\phi\,p_u}{m_2 l^2(m_1 + m_2\sin^2\phi)} \tag{21}$$

L'Hamiltonien est donc :

$$H(u,\phi,p_u,p_\phi) = \frac{1}{2(m_1+m_2\sin^2\phi)}\left(p_u^2 + \frac{m_1+m_2}{m_2 l^2}p_\phi^2 - \frac{2\cos\phi}{l}p_u p_\phi\right) - m_2 g l\cos\phi \qquad (22)$$

Les équations de Hamilton sont alors :

$$\begin{cases} \dot{u} = \dfrac{\partial H}{\partial p_u} = \dfrac{l\,p_u - \cos\phi\,p_\phi}{l(m_1+m_2\sin^2\phi)} \\ \dot{\phi} = \dfrac{\partial H}{\partial p_\phi} = \dfrac{(m_1+m_2)p_\phi - m_2 l\cos\phi\,p_u}{m_2 l^2(m_1+m_2\sin^2\phi)} \\ \dot{p}_u = -\dfrac{\partial H}{\partial u} = 0 \\ \dot{p}_\phi = -\dfrac{\partial H}{\partial \phi} = -\sin\phi\left(m_2 g l + \dfrac{(l\,p_u - \cos\phi\,p_\phi)\left((m_1+m_2)p_\phi - m_2 l\cos\phi\,p_u\right)}{l^2(m_1+m_2\sin^2\phi)^2}\right) \end{cases} \qquad (23)$$

Exercice 3 : Toboggans liés par un ressort

Paramétrisation et notations. Les positions des deux particules sont

$$\mathbf{r}_1(\theta_1) = \big(r\cos\theta_1,\ r\sin\theta_1,\ h\,\theta_1\big), \qquad \mathbf{r}_2(\theta_2) = \big(2r\cos\theta_2,\ 2r\sin\theta_2,\ h\,\theta_2\big).$$

On pose $\Delta \equiv \theta_2 - \theta_1$. On aura fréquemment besoin de la distance entre les particules,

$$\mathbf{d} \equiv \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 = \big(2r\cos\theta_2 - r\cos\theta_1,\ 2r\sin\theta_2 - r\sin\theta_1,\ h(\theta_2-\theta_1)\big),$$

de norme

$$L(\Delta) \ \equiv\ \|\mathbf{d}\| = \sqrt{r^2\Big[(2\cos\theta_2-\cos\theta_1)^2 + (2\sin\theta_2-\sin\theta_1)^2\Big] + h^2(\theta_2-\theta_1)^2} = \sqrt{r^2\big(5-4\cos\Delta\big) + h^2\Delta^2}\,. \qquad (23)$$

Pour généralité, on introduit une longueur à vide du ressort $\ell_0 \geq 0$. Le potentiel élastique est alors $V_s = \frac{K}{2}\big(L(\Delta) - \ell_0\big)^2$. (Le cas fréquent $\ell_0 = 0$ s'obtient en la posant nulle dans les formules ci-dessous.)

1. **Lagrangien et équations d'Euler–Lagrange**
   Les vitesses sont

   $$\dot{\mathbf{r}}_1 = \big(-r\sin\theta_1\,\dot\theta_1,\ r\cos\theta_1\,\dot\theta_1,\ h\,\dot\theta_1\big), \quad \dot{\mathbf{r}}_2 = \big(-2r\sin\theta_2\,\dot\theta_2,\ 2r\cos\theta_2\,\dot\theta_2,\ h\,\dot\theta_2\big),$$

   d'où

   $$v_1^2 = (r^2+h^2)\dot\theta_1^2, \qquad v_2^2 = (4r^2+h^2)\dot\theta_2^2.$$

   L'énergie cinétique totale vaut

   $$T = \frac{1}{2}m\Big[(r^2+h^2)\dot\theta_1^2 + (4r^2+h^2)\dot\theta_2^2\Big].$$

Sous $\mathbf{F}_g = -mg\,\mathbf{e}_z$, le potentiel de pesanteur est $V_g = mg(z_1 + z_2) = mgh(\theta_1 + \theta_2)$. Ainsi le lagrangien (coordonnées généralisées θ_1, θ_2) est

$$\boxed{\mathcal{L}(\theta_1, \theta_2, \dot\theta_1, \dot\theta_2) = \frac{1}{2}m\Big[(r^2 + h^2)\dot\theta_1^2 + (4r^2 + h^2)\dot\theta_2^2\Big] - mgh(\theta_1 + \theta_2) - \frac{K}{2}\big(L(\Delta) - \ell_0\big)^2.} \tag{24}$$

Notons

$$S(\Delta) \equiv L(\Delta), \qquad S'(\Delta) \equiv \frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}\Delta} = \frac{2r^2 \sin\Delta + h^2\Delta}{S(\Delta)}.$$

Comme S ne dépend que de $\Delta = \theta_2 - \theta_1$, on a $\partial_{\theta_1} S = -S'(\Delta)$, $\partial_{\theta_2} S = +S'(\Delta)$. Les équations d'Euler–Lagrange s'écrivent alors

$$m(r^2 + h^2)\,\ddot\theta_1 + mgh - K\,\big(S - \ell_0\big)\,S'(\Delta) = 0, \tag{25}$$

$$m(4r^2 + h^2)\,\ddot\theta_2 + mgh + K\,\big(S - \ell_0\big)\,S'(\Delta) = 0. \tag{26}$$

2. **Conservation de l'énergie et expression de l'énergie totale**

   Comme $\mathcal{L}$ ne dépend pas explicitement du temps, l'énergie mécanique $E = T + V_g + V_s$ est conservée :

$$\boxed{E = \frac{1}{2}m\Big[(r^2 + h^2)\dot\theta_1^2 + (4r^2 + h^2)\dot\theta_2^2\Big] + mgh(\theta_1 + \theta_2) + \frac{K}{2}\big(S(\Delta) - \ell_0\big)^2,} \qquad \frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = 0. \tag{27}$$

3. **Moments conjugués**

   Par définition,

$$p_{\theta_1} \equiv \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot\theta_1} = m(r^2 + h^2)\dot\theta_1, \qquad p_{\theta_2} \equiv \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot\theta_2} = m(4r^2 + h^2)\dot\theta_2. \tag{28}$$

4. **Hamiltonien et équations de Hamilton**

   En inversant (28) :

$$\dot\theta_1 = \frac{p_{\theta_1}}{m(r^2 + h^2)}, \qquad \dot\theta_2 = \frac{p_{\theta_2}}{m(4r^2 + h^2)}.$$

   Le Hamiltonien $H = \sum_i p_{\theta_i}\dot\theta_i - \mathcal{L} = T + V_g + V_s$ s'écrit

$$\boxed{H(\theta_1, \theta_2, p_{\theta_1}, p_{\theta_2}) = \frac{p_{\theta_1}^2}{2m(r^2 + h^2)} + \frac{p_{\theta_2}^2}{2m(4r^2 + h^2)} + mgh(\theta_1 + \theta_2) + \frac{K}{2}\big(S(\Delta) - \ell_0\big)^2.} \tag{29}$$

   Les équations de Hamilton en découlent :

$$\dot\theta_1 = \frac{\partial H}{\partial p_{\theta_1}} = \frac{p_{\theta_1}}{m(r^2 + h^2)}, \qquad \dot\theta_2 = \frac{\partial H}{\partial p_{\theta_2}} = \frac{p_{\theta_2}}{m(4r^2 + h^2)}, \tag{30}$$

$$\dot p_{\theta_1} = -\frac{\partial H}{\partial \theta_1} = -mgh + K\,\big(S - \ell_0\big)\,S'(\Delta), \quad \dot p_{\theta_2} = -\frac{\partial H}{\partial \theta_2} = -mgh - K\,\big(S - \ell_0\big)\,S'(\Delta), \tag{31}$$

   où l'on a utilisé $\partial_{\theta_1} S = -S'(\Delta)$, $\partial_{\theta_2} S = +S'(\Delta)$. Les équations (30)–(31) sont équivalentes à (25)–(26).

5. **Condition pour des solutions avec $\theta_1(t) = \theta_2(t)$ pour tout t**
   Imposons $\theta_1(t) = \theta_2(t) = \theta(t)$. Alors $\Delta = 0$ pour tout t, et, d'après (23), $S(0) = \sqrt{r^2(5-4)} = r$ tandis que
$$S'(0) = \frac{2r^2 \sin 0 + h^2 \cdot 0}{S(0)} = 0.$$
   Les termes de couplage ressort dans (25)–(26) s'annulent donc pour toute valeur de ℓ_0. Les deux équations deviennent indépendantes :
$$m(r^2 + h^2)\,\ddot{\theta} + mgh = 0, \qquad m(4r^2 + h^2)\,\ddot{\theta} + mgh = 0.$$
   Pour qu'une même fonction $\theta(t)$ satisfasse simultanément ces deux équations, il faut et il suffit que
$$\frac{gh}{r^2 + h^2} = \frac{gh}{4r^2 + h^2}.$$
   Comme $r > 0$ et $h > 0$ par hypothèse, on en déduit
$$\boxed{\text{La seule possibilité est } g = 0\,.}$$
   (Des cas dégénérés non physiques comme $r = 0$ ou $m = 0$ sont exclus par l'énoncé ; $h = 0$ annulerait l'effet de la pesanteur mais contredit $h > 0$.)
6. **Expression explicite des solutions synchrones**
   Lorsque $g = 0$, les équations d'Euler–Lagrange à $\Delta = 0$ se réduisent à
$$m(r^2 + h^2)\,\ddot{\theta} = 0, \qquad m(4r^2 + h^2)\,\ddot{\theta} = 0,$$
   donc
$$\boxed{\theta_1(t) = \theta_2(t) = \theta(t) = \omega\, t + \theta_0, \qquad \omega, \theta_0 \in \mathbb{R}.}$$
   Autrement dit, en apesanteur, toute rotation uniforme commune (ou solution au repos $\omega = 0$) est une solution synchrone ; le ressort n'exerce aucun couple « de déphasage » à $\Delta = 0$ car $S'(0) = 0$.

   Remarques.
   — La valeur de ℓ_0 n'a pas d'influence sur la condition d'existence des solutions $\theta_1 = \theta_2$ puisque le terme de ressort est proportionnel à $S'(\Delta)$ et s'annule pour $\Delta = 0$.
   — En dehors du cas $g = 0$, il n'existe pas de solutions exactement synchrones $\theta_1 = \theta_2$ pour tout t.